

7

Proporcionalidad numérica

CURIOSIDADES MATEMÁTICAS

RECETAS PROPORCIONALES

En las recetas se aplica la proporcionalidad desde hace casi 4 000 años. La primera receta conocida procede de Mesopotamia y el primer recetario medieval es un manuscrito del siglo XIII.



En las recetas es fundamental conocer qué ingredientes intervienen en ellas y las cantidades de estos que deben utilizarse.

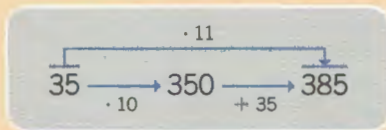
Si variamos la cantidad de un ingrediente, o queremos realizar la receta para diferente número de personas hay que calcular la cantidad de los demás ingredientes que corresponde de forma proporcional. Al poner el doble de harina, habrá que poner doble de cacao, de mantequilla, de azúcar...

Investiga

1. Busca una receta sencilla para 2 personas. Si quisieras hacerla para 4 personas, ¿cómo podrías hallar la cantidad necesaria de cada ingrediente?
2. ¿Qué es un reparto proporcional? Busca información y pon un ejemplo.

CÁLCULO MENTAL

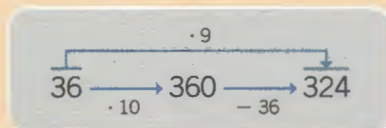
Multiplicar un número por 11: multiplicar por 10 y luego sumar ese número



Calcula mentalmente.

$$\begin{array}{ll} 14 \cdot 11 = & 300 \cdot 11 = \\ 20 \cdot 11 = & 510 \cdot 11 = \\ 31 \cdot 11 = & 630 \cdot 11 = \end{array}$$

Multiplicar un número por 9: multiplicar por 10 y luego restar ese número



Calcula mentalmente.

$$\begin{array}{ll} 12 \cdot 9 = & 230 \cdot 9 = \\ 35 \cdot 9 = & 340 \cdot 9 = \\ 57 \cdot 9 = & 780 \cdot 9 = \end{array}$$

1 Conocer razón y proporción

- Una **razón** de dos números a y b es el cociente $\frac{a}{b}$.
- Una **proporción** es una igualdad entre dos razones.

Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ decimos que los números a , b , c y d forman una proporción.

- La **constante o razón de proporcionalidad** de una proporción es el cociente de cualquiera de sus razones.

1. Averigua si cada par de razones forma una proporción.

a) $\frac{1}{5}$ y $\frac{3}{15}$

c) $\frac{2}{5}$ y $\frac{8}{10}$

e) $\frac{4}{7}$ y $\frac{12}{21}$

b) $\frac{5}{9}$ y $\frac{10}{24}$

d) $\frac{8}{14}$ y $\frac{16}{28}$

f) $\frac{9}{21}$ y $\frac{27}{63}$

2. Calcula la razón de proporcionalidad de cada proporción.

a) $\frac{2}{5} = \frac{6}{15}$

b) $\frac{3}{10} = \frac{12}{40}$

c) $\frac{14}{2} = \frac{49}{7}$

3. Piensa y escribe una proporción.

a) Cuya constante de proporcionalidad sea 2.

b) Cuya constante de proporcionalidad sea 3.

c) Cuya constante de proporcionalidad sea 4.

d) Cuya constante de proporcionalidad sea 5.

2 Calcular el término desconocido en una proporción

- En la proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ los números a y d son los **medios** y b y c son los **extremos**.
- En una proporción se cumple que el producto de los medios es igual al producto de los extremos.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

Calcula el término desconocido en la siguiente proporción: $\frac{2}{5} = \frac{\square}{15}$

$$\frac{2}{5} = \frac{\square}{15} \rightarrow 2 \cdot 15 = 5 \cdot \square \rightarrow 30 = 5 \cdot \square \rightarrow \square = \frac{30}{5} = 6$$

4. Calcula el término desconocido en cada proporción.

a) $\frac{3}{7} = \frac{\square}{42}$

c) $\frac{1}{9} = \frac{11}{\square}$

e) $\frac{2}{9} = \frac{\square}{45}$

b) $\frac{0,3}{1,2} = \frac{\square}{6}$

d) $\frac{1,5}{9} = \frac{4,5}{\square}$

f) $\frac{0,8}{3,6} = \frac{\square}{7,2}$

5. Escribe el siguiente problema en forma de proporción y resuélvelo.

Para ir a un museo, Luis compra 4 entradas por 32 €.
¿Cuánto costarán 6 entradas? ¿Y 8 entradas?

a) Escribe una proporción con el número de entradas y sus precios.

b) ¿Cuál es la constante de proporcionalidad?

3 Identificar magnitudes directamente proporcionales

Dos **magnitudes** son **directamente proporcionales** si al formar razones con los valores correspondientes a ambas magnitudes, la constante de proporcionalidad es siempre la misma.

Averigua si la magnitud *A* y la magnitud *B* son directamente proporcionales.

Magnitud <i>A</i>	1	2	3	4	5
Magnitud <i>B</i>	4	8	12	16	20

$$\frac{1}{4} = \frac{2}{8} = \frac{3}{12} = \frac{4}{16} = \frac{5}{20} = 0,25 \leftarrow \text{La constante de proporcionalidad es siempre igual, por tanto, son directamente proporcionales.}$$

6. Completa las tablas y contesta.

a) En un restaurante un menú cuesta 12 €. ¿Cuánto costarán 5 menús? ¿Y 9 menús?

Menús	1	2	3	4	5	8	9
Precio							

Comprueba que las magnitudes *número de menús* y *precio* son magnitudes directamente proporcionales. ¿Cuál es la constante de proporcionalidad?

b) Para pintar una superficie de 1 m², Miguel utiliza 0,7 kg de pintura. ¿Cuántos kilos de pintura utilizará para pintar 2 m²? ¿Y para pintar 15 m²?

Superficie	1	2	3	4	9	10	12	15
Pintura								

Comprueba que las magnitudes *superficie* y *kilos de pintura* son magnitudes directamente proporcionales. ¿Cuál es la constante de proporcionalidad?

4

Resolver problemas de proporcionalidad directa con regla de tres

- La **regla de tres simple directa** es una técnica que permite calcular, en magnitudes directamente proporcionales, el valor de un dato, conociendo otros tres datos relacionados.
- Para resolver problemas mediante una regla de tres simple directa, sigue estos pasos:
 - 1.º Identifica las magnitudes y comprueba si son directamente proporcionales.
 - 2.º Plantea la regla de tres con los datos del problema.
 - 3.º Establece la igualdad entre las razones resultantes.
 - 4.º Despeja la x .

Para hacer 60 barras de pan, en una panadería utilizan 45 kg de harina. ¿Cuántos kilos de harina necesitan para hacer 100 barras de pan?

Magnitudes: *barras de pan* – *kilos de harina*. Son magnitudes directamente proporcionales.

$$\begin{array}{l} 60 \text{ barras} \xrightarrow{\text{utilizan}} 45 \text{ kg} \\ 100 \text{ barras} \xrightarrow{\text{utilizarán}} x \end{array} \quad \frac{60}{100} = \frac{45}{x} \rightarrow x = \frac{45 \cdot 100}{60} = \frac{4500}{60} = 75$$

Para hacer 100 barras necesitan 75 kg de harina.

7. Resuelve mediante una regla de tres.

- a) Por 3 clases de natación, Ignacio paga 24 €. ¿Cuánto pagará por 35 clases?

- b) En una cafetería 5 desayunos cuestan 12 €. Hoy han servido 125 desayunos. ¿Cuánto han recaudado en total?

- c) Un bono de autobús con 10 viajes cuesta 14 €. ¿Cuánto cuestan 7 viajes utilizando este bono?



5 Identificar magnitudes inversamente proporcionales

Dos **magnitudes** son **inversamente proporcionales** si, al formar razones con los valores correspondientes a ambas magnitudes, se cumple que el producto de los valores correspondientes a ambas magnitudes es constante.

Averigua si las magnitudes A y B son inversamente proporcionales.

Magnitud A	1	2	4	5	6
Magnitud B	3	1,5	0,75	0,6	0,5

$1 \cdot 3 = 2 \cdot 1,5 = 4 \cdot 0,75 = 5 \cdot 0,6 = 6 \cdot 0,5 = 3$ ← El producto es constante, por tanto, son inversamente proporcionales.

8. Escribe si son magnitudes directamente proporcionales o inversamente proporcionales y razona tu respuesta.

a) La velocidad de un coche y el tiempo que emplea en recorrer un trayecto.

b) El peso de una caja de fruta y su precio.

c) El número de albañiles de una obra y el tiempo que tardan en terminarla.

d) El lado de un cuadrado y su perímetro.

e) El número de ovejas de una granja y el tiempo que les dura una cantidad de pienso.

9. Comprueba que los datos recogidos en esta tabla corresponden a magnitudes inversamente proporcionales.

Magnitud A	3	6	9	18
Magnitud B	15	7,5	5	2,5

6

Resolver problemas de proporcionalidad inversa con regla de tres

- La **regla de tres simple inversa** es una técnica que permite calcular, en magnitudes inversamente proporcionales, el valor de un dato, conociendo otros tres datos relacionados.
- Para resolver problemas mediante una regla de tres simple inversa sigue estos pasos:
 - 1.º Identifica las magnitudes y comprueba si son inversamente proporcionales.
 - 2.º Plantea la regla de tres con los datos del problema.
 - 3.º Establece la igualdad entre las razones tomando la segunda razón como su inversa.
 - 4.º Despeja la x .

Para llenar un depósito se abre un grifo que echa 12 ℓ por minuto. ¿Cuánto tiempo tardará en llenar el depósito un grifo que echa 60 ℓ por minuto?

Magnitudes: *litros – tiempo*. Son magnitudes inversamente proporcionales.

$$\begin{array}{l}
 12 \text{ litros} \xrightarrow{\text{tarda}} 1 \text{ minuto} \\
 60 \text{ litros} \xrightarrow{\text{tardará}} x
 \end{array}
 \qquad
 \frac{12}{60} = \frac{x}{1} \rightarrow 12 \cdot 1 = 60 \cdot x \rightarrow x = \frac{12 \cdot 1}{60} = \frac{12}{60} = 0,2$$

Si echa 60 ℓ por minuto, tardará 0,2 minutos.

10. Resuelve mediante una regla de tres.

- a) Para construir un puente un grupo de 18 obreros tarda 90 días.
¿Cuántos días tardarán en construirlo un grupo de 30 obreros?

- b) En una granja hay 36 vacas y pienso para 24 días.
¿Para cuántos días tendrán pienso si traen 18 vacas más?

- c) Un coche lleva una velocidad constante de 90 km/h y tarda en hacer un trayecto 50 minutos. ¿Cuánto tiempo tardará en hacer este trayecto si disminuye su velocidad a 80 km/h?

7 Resolver problemas de proporcionalidad

11. Piensa si son magnitudes directamente o inversamente proporcionales y, después, resuelve.

- a) Silvia compra una caja de naranjas de 8 kg por 10,40 €. ¿Cuánto costará una caja con 12 kg de naranjas?



- b) Para envasar cierta cantidad de aceite en garrafas de 5 litros se han utilizado 66 garrafas. ¿Cuántas garrafas de 6 litros necesitaremos para envasar esta cantidad de aceite?

- c) En una fábrica de coches se producen 380 unidades cada 5 horas. ¿Cuántos coches se harán en 12 horas, manteniendo el mismo ritmo?



- d) Para recoger las manzanas de un huerto, un grupo de 8 personas tarda 9 horas. ¿Cuánto tiempo tardará en recoger estas manzanas un grupo de 6 personas?

- e) Pablo ha cobrado 425 € por 5 días de trabajo. ¿Cuánto cobrará por 19 días?

12. Resuelve.

- a) De un manantial, Pablo ha recogido 200 litros de agua en 4 minutos.
¿Cuántos litros de agua recogerá en una hora?
- b) Guillermo tiene 3 caballos que consumen una cantidad de pienso en 10 días.
¿Para cuántos días tendrían pienso 5 caballos?
- c) En levantar las aceras de una calle, 4 excavadoras tardan 14 días. Si se quiere terminar las obras en 7 días, ¿cuántas excavadoras se necesitarán?
- d) Amalia necesita 4,5 m de tela para hacer 2 camisas. ¿Qué cantidad de tela necesitará para hacer 9 camisas como las anteriores?
- e) Un ciclista lleva una velocidad constante de 20 km/h y tarda 8 horas en hacer un trayecto. ¿Qué velocidad lleva otro ciclista que hace el mismo trayecto en 5 horas?
- f) Carlos y Ana reparten paquetes iguales. Carlos ha repartido 5 paquetes con un peso total de 6 kg. ¿Cuántos kilos pesarán los 9 paquetes que ha repartido Ana?

8 Calcular porcentajes

- El **tanto por ciento** o **porcentaje** de un número significa que si dividimos el número en 100 partes iguales tomamos las partes que indica el tanto por ciento.
- Para **calcular el tanto por ciento** de un número, se multiplica el número por el tanto por ciento y el resultado se divide entre 100.

$$12\% \text{ de } 300 = \frac{12 \cdot 300}{100} = 0,12 \cdot 300 = 36$$

13. Escribe un porcentaje asociado a cada situación.

- 24 de cada 100 personas leen un libro al año.
- 15 de cada 100 alumnos juegan al baloncesto el fin de semana.
- 12 de cada 100 telespectadores prefieren las películas.
- 4 de cada 100 internautas no tienen teléfono fijo.

14. Calcula.

- | | | | |
|-----------------|-----------------|------------------|------------------|
| a) 8 % de 300 | c) 2 % de 500 | e) 15 % de 600 | g) 24 % de 800 |
| b) 3 % de 1 200 | d) 6 % de 4 800 | f) 27 % de 2 500 | h) 41 % de 6 700 |

15. Piensa y coloca el signo adecuado en cada caso sin calcular. Después, calcula y comprueba tus respuestas.

20 % de 30 30 % de 20

15 % de 90 15 % de 80

40 % de 50 45 % de 50

32 % de 80 25 % de 40

16. Averigua si las siguientes oraciones son ciertas o falsas.

a) Calcular el 7 % de 180 es lo mismo que multiplicar 180 por 0,7.

b) Calcular el 12 % de 500 es lo mismo que multiplicar 500 por 0,12.

c) Calcular el 4,5 % de 1 200 es lo mismo que multiplicar 1 200 por 0,45.



17. En una librería hay 800 novelas. El 15 % son de autores sudamericanos. ¿Cuántas novelas han sido escritas por autores sudamericanos?

18. En una pastelería hay 280 pasteles. El 30 % son de chocolate. ¿Cuántos pasteles de la pastelería no son de chocolate?

19. En una ciudad viven 48 000 personas. El 65 % trabaja en el sector servicios y el 20 % en el sector secundario. ¿Cuántas personas trabajan en cada uno de esos dos sectores?

20. En un gimnasio hay 500 socios. El 30 % son hombres y de ellos, el 20 % son jubilados. ¿Cuántos jubilados varones son socios del gimnasio?



9 Resolver problemas de porcentajes

21. En un monte hay 800 encinas. Un cuarto de ellas tienen una plaga y el resto están sanas.
¿Cuántas encinas sanas hay en el monte? ¿Qué porcentaje del total son?

22. Un teatro se ha llenado con 400 espectadores. Son niños 100 de ellos.
¿Qué porcentaje de los espectadores está formado por niños? ¿Y por adultos?



23. El precio de un artículo es de 90 €. Hay que añadirle además el 4 % de IVA. ¿Cuál es el precio final del artículo?

24. El precio de un artículo era de 80 €. Se rebajó un 20 %.
¿Cuál era el precio final?

25. El 40 % de las frutas consumidas en un comedor son peras. Se han consumido 36 peras.
¿Cuántas piezas de fruta había en el comedor?



26. En una web hay 400 artículos sobre matemáticas.
Son el 80 % del número total de artículos.
¿Cuántos artículos hay en total en la web?

27. Marcos y Sara han comprado un mismo modelo de televisor. En la tienda en la que compró Marcos costaba 480 € y le hicieron un 20 % de descuento. En la tienda en la que compró Sara costaba 600 € y le hicieron un 18 % de descuento.
¿Cuántos euros les rebajaron en cada tienda?
¿Quién de los dos pagó menos por el televisor?



28. Se ha hecho una encuesta a 5 000 personas sobre su sabor de helado favorito. El 30 % prefiere fresa, el 42 % chocolate, el 21 % limón y el resto vainilla.
¿Cuántas personas prefieren el sabor a vainilla?

29. En un libro hay 200 cuentos. El 12 % son de miedo, 120 son de aventuras y el resto son de temas fantásticos.
a) ¿Cuántos cuentos de tema fantástico hay en el libro?

b) ¿Qué porcentaje de los cuentos son de aventuras? ¿Qué porcentaje son fantásticos?



30. En un almacén hay 2 000 móviles. El mes pasado distribuyó el 45 % y esta semana ha distribuido 800. ¿Cuántos móviles quedan en el almacén? ¿Qué porcentaje de los que había al comienzo son?

REPASA LO APRENDIDO

1 Calcula el término que falta en cada proporción.

a) $\frac{2}{9} = \frac{\square}{72}$

b) $\frac{3}{14} = \frac{21}{\square}$

c) $\frac{7}{12} = \frac{\square}{36}$

2 Resuelve estas ecuaciones.

a) $3x + x - 8 + 12 = 2x - 10$

c) $x^2 + x - 2 = 0$

b) $4x - 6 + 11 = 2x - 3$

d) $x^2 - 8x + 15 = 0$

3 Resuelve.

a) En una clase de gimnasia de mantenimiento hay 22 alumnos y 13 son mujeres. En otra clase hay 20 alumnos de los cuales 12 son mujeres. ¿En qué clase es mayor la parte de alumnos que son mujeres?

b) Ángela compra un piso. Primero, paga $\frac{3}{8}$ de su valor y el resto lo paga en 10 plazos iguales. ¿Qué fracción del total pagará en cada plazo?

c) Una familia gasta $\frac{1}{15}$ de sus ingresos mensuales en el alquiler del piso y $\frac{1}{8}$ en transporte y ropa. ¿Qué fracción de los ingresos mensuales les queda?